

Momento Angular Cuántico

Partiendo de $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow \hat{L} = \hat{R} \times \hat{P}$
 $\hat{L} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= i\hbar L_z \\ [R_i, P_j] &= i\hbar \delta_{ij} \Rightarrow [L_z, L_x] = i\hbar L_y \\ [L_y, L_z] &= i\hbar L_x \end{aligned}$$

No podemos medir simultáneamente las componentes de momento angular.

Para momento angular general $\vec{J}$ (espín u orbital)

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= i\hbar J_z \\ [J_z, J_x] &= i\hbar J_y \\ [J_y, J_z] &= i\hbar J_x \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{en notación} \\ \text{compacta} \end{array} \quad [J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

Hay una $\sum_k$ escondida

Definimos $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ y vemos que

$$[J^2, J_x] = 0 \quad [J^2, J_y] = 0 \quad [J^2, J_z] = 0$$

$\therefore$ Podemos medir J^2 junto con J_x, J_y $\circ$ J_z

Para un potencial central $V(\vec{r}) = V(r)$

veremos que L^2, L_x, L_y, L_z son constantes de mov. (conmutan con H)

Podemos construir una base de e-vectores comunes a H, L^2 y alguna componente de $\vec{L}$.

Podemos medir J^2 y UNA componente de $\vec{J}$. Hay que elegir cuál componente.

Al eje que elegimos se le llama eje de cuantización.

Se suele usar el eje de cuantización a lo largo de Z y eso haremos.

Buscamos e-vectores comunes a J^2 y J_z .

Teoría de momento angular

• Vamos a definir operadores de escalera J_+ y J_- .

Definimos $J_+ = J_x + iJ_y$ $J_- = J_x - iJ_y$
 $J_+^\dagger = J_x^\dagger - iJ_y^\dagger = J_x - iJ_y$

(Estos sirven cuando buscamos e-vectores de J_z)

$J_\pm$ son operadores no hermitianos, conjugados entre sí. Análogos a $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ del oscilador armónico.

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}) \quad \text{adimensional}$$

$$J_-^\dagger = J_+$$

$$\begin{aligned} [J_z, J_+] &= [J_z, J_x + iJ_y] = [J_z, J_x] + i[J_z, J_y] \\ &= i\hbar J_y + i(-i\hbar J_x) = \hbar(J_x + iJ_y) \\ &= \hbar J_+ \end{aligned}$$

$$[J_z, J_-] = -\hbar J_-$$

$$[J^2, J_+] = [J^2, J_x + iJ_y] = \cancel{[J^2, J_x]} + i\cancel{[J^2, J_y]} = 0$$

$$[J^2, J_-] = 0$$

$$[J^2, J_z] = 0$$

$$[J^2, J_i] = 0$$

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= i\hbar J_z \\ [J_z, J_x] &= i\hbar J_y \\ [J_y, J_z] &= i\hbar J_x \end{aligned}$$

$$J_+ J_- = (J_x + i J_y)(J_x - i J_y) = \overbrace{J_x^2 + J_y^2}^{J^2 - J_z^2} \underbrace{-i J_x J_y + i J_y J_x}_{i [J_y, J_x] = -i \hbar J_z}$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$J^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$$

Eigenvalores de J^2 y J_z

Veamos que $\langle J^2 \rangle \geq 0$

$$\begin{aligned} \bullet \langle J^2 \rangle &= \langle \psi | J^2 | \psi \rangle = \langle \psi | J_x^2 | \psi \rangle + \overbrace{\langle \psi | J_y^2 | \psi \rangle}^{\langle \psi | J_y J_y | \psi \rangle} + \langle \psi | J_z^2 | \psi \rangle \\ &\quad \uparrow \text{vector arbitrario} \\ &= \| J_x | \psi \rangle \|^2 + \| J_y | \psi \rangle \|^2 + \| J_z | \psi \rangle \|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y^\dagger J_y &= J_y J_y \\ J_y^\dagger &= J_y \end{aligned}$$

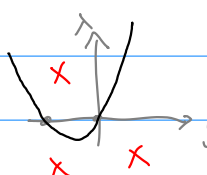
- Veamos que los e-valores de J^2 son positivos
Si $|\varphi\rangle$ es e-vector de J^2 con e-valor λ ,

$$0 \leq \langle \varphi | J^2 | \varphi \rangle = \lambda \langle \varphi | \varphi \rangle = \lambda \| |\varphi\rangle \|^2$$

Como tenemos un producto ≥ 0 y $\| |\varphi\rangle \|^2 \geq 0$ entonces λ debe ser $\lambda \geq 0$.

$\therefore$ Los e-valores de J^2 son positivos.

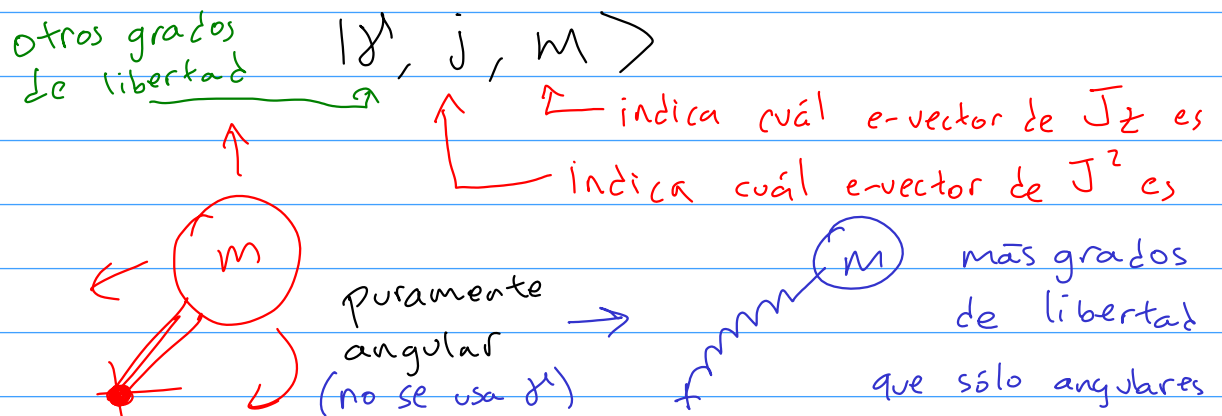
Siendo mañosos, llamaremos $\lambda = \hbar^2 j(j+1)$, $j \geq 0$.
dimensional

$j(j+1)$  para cada $\lambda \geq 0$ hay un $j \geq 0$

Escribiremos a los e-valores de J_z como $\hbar m$
dimensional

Ya con esto podemos etiquetar a los e-vectores con j y m .

Escribiremos a los e-vectores como



Las ecuaciones de eigenvalores que buscamos resolver son

$$J^2 |\chi, j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |\chi, j, m\rangle$$

$$J_z |\chi, j, m\rangle = \hbar m |\chi, j, m\rangle$$

Pensemos que $\hbar m$ y $\hbar^2 j(j+1)$ son los e-valores de J_z y J^2 asociados al mismo e-vector $|\chi, j, m\rangle$

Lema I: $-j \leq m \leq j$

$$0 \leq \|J_+ |\chi, j, m\rangle\|^2 = \langle \chi, j, m | J_- J_+ |\chi, j, m\rangle$$

$$= \langle \chi, j, m | J^2 - J_z^2 - \hbar J_z |\chi, j, m\rangle$$

$$= \langle \chi, j, m | \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar^2 m |\chi, j, m\rangle$$

$$= (\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m^2 - \hbar^2 m) \langle \chi, j, m | \chi, j, m \rangle^1$$

Buscamos e-vectores normalizados.

$$= \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m(m+1)$$

Análogo

$$0 \leq \|J_- |\chi, j, m\rangle\|^2 = \hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 m(m-1)$$

Tenemos que

$$j(j+1) - m(m+1) \geq 0$$

$$j(j+1) - m(m-1) \geq 0$$

La podemos reescribir como $j(j+1) - m(m+1)$

$$(j-m)(j+m+1) \geq 0$$

$$(j+m)(j-m+1) \geq 0$$

pues

$$\overbrace{j^2 + j\cancel{m} + j - \cancel{m}j - m^2 - m}^{j(j+1) - m(m+1)} \geq 0$$

$$\overbrace{j^2 - j\cancel{m} + j + \cancel{m}j - m^2 + m}^{j(j+1) - m(m-1)} \geq 0$$

De aquí obtenemos distintas desigualdades.

$$\rightarrow j - m \geq 0$$

$$\boxed{j \geq m}$$

$$j + m + 1 \geq 0$$

$$\boxed{m \geq -j - 1}$$

en otro caso

$$j - m \leq 0 \quad j + m + 1 \leq 0$$

X no se vale

$$\rightarrow j + m \geq 0$$

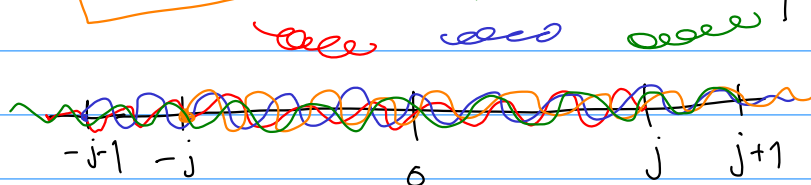
$$\boxed{m \geq -j}$$

$$j - m + 1 \geq 0$$

$$\boxed{j + 1 \geq m}$$

$$j + m \leq 0 \quad j - m + 1 \leq 0$$

X no se vale



sólo en esta región se satisfacen simultáneamente las condiciones

$$\therefore -j \leq m \leq j$$